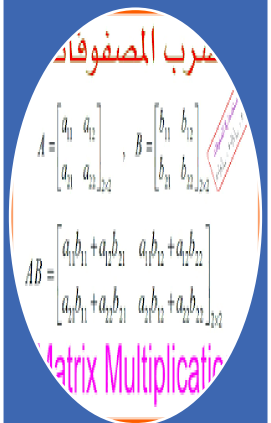
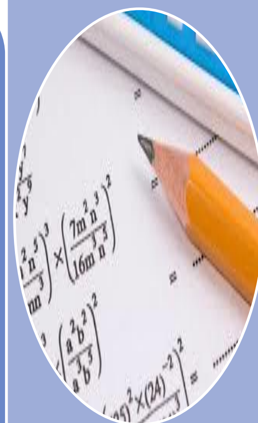


Statistics for Data Analysis

BLOG



Matrices

المصفوفات

الاستاذ المساعد

د.سهاد علي شهيد

Chapter One الفصل الأول

(The Matrix) المصفوفة

Chapter One

1

الفصل الاول

المصفوفات (The Matrix)

1- المقدمة: Introduction

1-2 بعض انماط المصفوفات Some of the patterns of matrices.

1-3 العمليات الحسابية على المصفوفات Arithmetic operations on matrices.

1-3-1 جمع وطرح المصفوفات: Add and subtract matrices

1-3-2 ضرب المصفوفات: Matrix Multiplication

1-3-3 ضرب المصفوفات بالتجزئة :Multiply by Partition matrix

1-4 مبدلة المصفوفة.: Matrix Transpose

1-5 العمليات الصفية الاولية :Elementary operations rows

1-6 بعض تطبيقات المصفوفات: Some Matrix Applications

تمارين نهاية الفصل

الفصل الاول

المصفوفات (The Matrices)

1-1 المقدمة: (Introduction)

المصفوفة كمصطلحٍ استخدمت في كثيرٍ من المجالات باختلاف الزمان والمكان، ففي روما القديمة كانت المصفوفة حيوانًا يحتفظ به للتربية، أو يطلق هذا المصطلح على النبات الأم الذي تستخدم بذوره لإنتاج أنواعٍ أخرى من النباتات. أمّا في اللغة الإنكليزية كان لهذه الكلمة الكثير من المعاني؛ فعلماء الرياضيات استخدموها لتنظيم مستطيلٍ من الأرقام أو الرموز التي تستخدم لإجراء حساباتٍ مختلفةٍ، أما علماء الجيولوجيا استخدموها للدلالة على التربة أو الصخور التي يتم اكتشاف أحافير فيها.

ابتكر اسم المصفوفة لأول مرةٍ سنة 1848 على يد (جي جي سيلفستر) كاسمٍ لمجموعةٍ مرتبةٍ من الأرقام، وفي عام 1855 قدم (آرثر كايلي) المصفوفة على أنها تمثيلٌ لعناصرٍ خطيةٍ، وهذه الفترة اعتبرت بداية الجبر الخطي ونظرية المصفوفات. فهي مجموعةٌ من الأرقام مرتبةٌ في عددٍ من الصفوف والأعمدة، عادةً تكون هذه الأرقام حقيقيةً ويمكن أن تكون معقدةً.

المصفوفة بشكل عام هي عبارة عن جدول من الأعداد الحقيقية ، ويسمى كل سطر من عناصر المصفوفة صفاً (row) ويسمى كل عمود من عناصر المصفوفة عموداً (column) . كما ويمكن تعريف المصفوفة ايضا بانها مجموعة الاعداد المرتبة على شكل مستطيل او مربع والموضوعة داخل قوسين بـ (المصفوفة (Matrix)) وتخضع لعمليات حسابية معينة، ويمكن صياغة تعريف المصفوفة وفق الاتي :

((المصفوفة هي منظومة من الاعداد (او الدوال) مرتبة على هيئة صفوف واعمدة بشكل مستطيل او مربع ويرمز للصفوف بالرمز (m) والاعمدة (n) ويرمز للمصفوفة بأحد الاحرف الكبيرة A او B او ...).، على سبيل المثال :

$$(B)\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad (A)\begin{bmatrix}2 & 3 & 7\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

المصفوفة (A) يمكن اعتبارها مصفوفة المعاملات لمجموعة المعادلات المتجانسة، وهي:

$$\begin{cases}2x+3y+7z=0\\ \quad x-y+5z=0\end{cases}$$

المصفوفة (B) يمكن اعتبارها مصفوفة محددة لمجموعة المعادلات الخطية غير المتجانسة ، وهي:

$$\begin{cases}2x+3y=7\\ \quad x-y=5\end{cases}$$

ويرمز للاعداد او الدوال بالرمز (a_{ij}) ويطلق عليها بـ (عناصر Element) المصفوفة ،كما في ادناه:

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \qquad \ldots \quad (1)$$

<u>تعريف عناصر المصفوفة</u> ، يشير الدليل الأول (i) في العنصر (a_{ij}) رقم الصف، و يشير الدليل الثاني (j) رقم العمود الذي يقع فيهما العنصر ، وسيحمل كل عنصر من الصف الثاني العدد 2 كدليل أول كما يحمل كل عنصر من العمود الخامس الرقم 5 كدليل ثاني. تعّرف كل مصفوفة ذات m من الصفوف و n من الاعمدة بانها من درجة $(m \times n)$ ويقرأ ذلك: المصفوفة من الدرجة m في n ، يقال للمصفوفة في (1) في بعض الاحيان المصفوفة $[a_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$ أو المصفوفة $A=[a_{ij}]$ ذات الدرجة $m \times n$. وعندما تكون الدرجة محددة ومعروفة سنكتب بشكل مختصر " المصفوفة A ".

2-1 _بعض انماط المصفوفات: (Some of pattrens of matrices)

من اشكال المصفوفات الاتي :

<u>1.المصفوفة المربعة (Square Matrix):</u> إذا كانت مصفوفة عدد صفوفها = عدد اعمدتها $m=n$ ، فإن المصفوفة (1) تكون مربعة ويمكن عندئذ تسميتها مصفوفة مربعة من الدرجة n او مصفوفة مربعة (nXn).

ومنها:

a- المصفوفة المثلثية السفلى: عناصر ما فوق القطر اصفار $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -5\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$

b– المصفوفة المثلثية العليا: عناصر ما تحت القطر اصفار $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c– المصفوفة القطرية Diagonal Matrix: كل العناصر فوق القطر وتحته اصفار $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ او

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

من خصائص المصفوفة القطرية :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 \\ 0 & a_{22}^n \end{pmatrix}$$

حيث n تمثل اي عدد ينتمي لمجموعة الاعداد الحقيقية R.

<u>**مثال (1):**</u> اذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ فأوجد A^5 وكذلك اذا كانت $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$ فأوجد B .

<u>**الحل :**</u>

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 3 & \pm 5 \end{pmatrix}$ اربع مصفوفات

d– مصفوفة الوحدة (Identity Matrix) : هي مصفوفة قطرية (ما فوق وما تحت القطر اصفار) وعناصر قطرها تتألف من الواحد الصحيح ويرمز لها بالرمز I مثل:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

من خصائصها انها تعد المحايد الضربي لأي مصفوفة مربعة اي ان $AI = IA = A$ و $I^n = I$

<u>**2. مصفوفة الصف ومصفوفة العمود (Row and Column Matrix)**</u>

a– مصفوفة الصف : هي مصفوفة من صف واحد وأي عدد من الاعمدة $1 \times n$ $(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots)$

b− **مصفوفة العمود** : هي مصفوفة مكونة من عمود واحد واي عدد من الصفوف $m \times 1$ $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \end{pmatrix}$

3.المصفوفة الصفرية (Null Matrix) : هي مصفوفة كل عناصرها اصفار ويرمز لها بالرمز $(\mathbf{0})$ من خصائصها انها تُعد المحايد الجمعي $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$ و $A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}$ ، مثل: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ... .

4.اثر المصفوفة (Trace of Matrix): في المصفوفة المربعة نسمي العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ، عناصر قطرية ونسمي حاصل جمع العناصر القطرية لمصفوفة مربعة A اثر المصفوفة (Trace of Matrix).

5.المصفوفات المتساوية (Equality Matrices): يقال ان المصفوفتين $A = [a_{ij}]\ , B = [b_{ij}]$ متساويتان فيما اذا كان (وإذا كان فقط) ، هاتان المصفوفتان من درجة واحدة وكان كل عنصر من احداهما مساوياً للعنصر المقابل لهُ من المصفوفة الثانية ، اي اذا كان واذا كان فقط:

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad , i = 1,2, \dots, m\ ;\ j = 1,2, \dots, n$$

اي تكون مصفوفتين متساويتين فيما إذا كانت واذا كانت فقط احداهما نسخة من الثانية.

مثال(2) : اذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & c & -1 \\ d & a+c & -1 \end{pmatrix}$ وكانت $A = B$ فأوجد كل من a, b, c, d .

الحل:

حيث ان $A = B$ ينتج ان $a + c = b, d = 0, a = -1, c = -1$ أي ان

$b = -1 - 1 = -2$ وعليه فأن $A = B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$