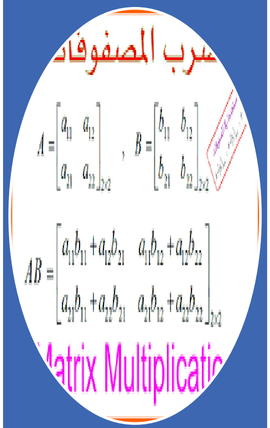

Statistics for Data Analysis
BLOG

Matrices

الاستاذ المساعد

د.سهاد علي شهيد

المصفوفات

Chapter One الفصل الأول

(The Matrix) المصفوفة

Chapter One

1

الفصل الاول

المصفوفات (The Matrix)

1−4−2 المصفوفة المتماثلة والمتماثلة تخالفياً (Symmetric and Reverse Matrix) :

a− المصفوفة المتماثلة (Symmetric Matrix): هي مصفوفة تساوي مبدلتها $(A = A^t)$ عندها يقال ان A متماثلة.

b− المصفوفة المتماثلة (تخالفيا) عكسياً (Reverse Matrix) : هي المصفوفة التي تحقق الشرط $(A = -A^t)$ ، عندها يقال ان A متماثلة عكسياً .

مثال (13): المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ متماثلة (Symmetric) لأنه $(A = A^t)$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

اما المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ متماثلة عكسياً (Reverse) لأنه $(A = -A^t)$ حيث ان:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } A^t = -\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = A$$

مثال(14) : جد المصفوفة $A_{3\times3}$ بحيث تكون متماثلة عكسياً ؟

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

مثال(15) : اثبت ان $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ متماثلة عكسياً ؟

1−5 العمليات الأولية على المصفوفات Elementary operations on matrices

a) العمليات الصفية الأولية : هي عمليات تجري على صفوف المصفوفة بهدف اختزالها وتتلخص تلك العمليات بالاتي :

1− تبديل صفوف مثلاً : $R_1 \leftrightarrow R_2$ او $R_1 \leftrightarrow R_3$

2− ضرب احد صفوف المصفوفة بعدد غير الصفر : مثل $-3R_1$ او $\frac{1}{2}R_2$ ...

3− ضرب احد صفوف المصفوفة بعدد غير الصفر وجمع النواتج مع صف اخر : مثلاً

$2R_1 + R_2$ او $-3R_1 + R_3$

☑**<u>ملاحظة</u> :الصف الذي يتغير المجموع عليه اما المضروب يبقى كما هو (الضرب ذهنياً) ثم جمع النواتج مع الصف الاخر .**

☑**<u>ملاحظة:</u> يمكن تكرار العمليات السابقة للوصول الى $(\mathbf{r.e.f})$ او $(\mathbf{r.r.e.f})$**

<u>* صيغة الدرجة الصفية row echelon form $(\mathbf{r.e.f})$:</u>

نقول ان المصفوفة على صيغة الدرجة الصفية (r.e.f) اذا تحقق :

1− الصفوف الصفرية ان وجدت فإنها تكون صفوف أخيرة .

2− وكل صف غير صفري يجب ان يكون اول عنصر فيه 1 (يسمى الواحد المتقدم) .

3− كل واحد متقدم في أي صف يجب ان يكون على اليمين بالنسبة للواحد المتقدم في الصفوف التي فوقه . وكما موضح ادناه :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*** صيغة الدرجة الصفية المختزلة reduced row echelon form $(\mathbf{r.r.e.f})$**

نقول ان المصفوفة على الصيغة الدرجة الصفية المختزلة (r.r.e.f) اذا تحقق الشروط الثلاث اعلاه في (r.e.f) : إضافة للشروط الثلاثة السابقة في الصيغة الدرجة يجب ان تحقق شرط رابع :

4− كل واحد متقدم يجب ان يكون باقي عناصر عموده اصفار .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1−5−1 منهجية الاختزال :

لفهم منهجية الاختزال يجب ان تعرف كيف يتم الوصول الى الشكل $(r.e.f)$ او $(r.r.e.f)$ ، وتتلخص بالخطوات الاتية:

- ✓ نجعل العنصر a_{11} واحد : تبديله مع صف اخر تحته يكون اول عنصر فيه 1 او بضرب صف تحته بعدد وجمعه مع الصف الأول او بقسمه الصف الأول على العنصر a_{11} .
- ✓ نصفر كل العناصر التي تحت a_{11} : نضرب الصف الأول بعكس إشارة a_{21} ونجمع النواتج مع الصف الثاني ونضرب الصف الأول في عكس إشارة a_{31} ونجمع النواتج مع الصف الثالث وهكذا .
- ✓ نجعل العنصر a_{22} واحد بنفس طريقة الخطوة الأولى ودون التعامل مع الصف الأول .
- ✓ نصفر كل العناصر التي تحت a_{22} بنفس طريقة الخطوة الثانية . ثم نجعل a_{33} واحد ونصفر ما تحته وهكذا .

☑**ملاحظة: عند جعل عنصر ما واحداً a_{11} او a_{22} او ... اذا كان صفر وما تحته اصفار ننتقل الى العنصر الذي على يمينه ونجعله واحد ثم نصفر ما تحته .**

☑**ملاحظة: اثناء الاختزال اذا وجد صف كله اصفار ننقله نجعله صف أخير .**

بهذا نكون قد وصلنا الى الشكل $(r.e.f)$ ، ولتكملة الاختزال الى الشكل $(r.r.e.f)$ يضاف للخطوات السابقة الخطوة الاتية:

- ✓ نبدأ من اخر واحد متقدم ونصفر العناصر التي فوقه ثم الواحد المتقدم قبل الأخير ونصفر ما فوقه وهكذا ... .

<u>مثال (16):</u> ضع كلاً من المصفوفات التالية على الصيغة الدرجية الصفية (r.e.f) ، ثم على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة (r.r.e.f) ؟

الحل :

$$A=\begin{bmatrix}2&2&2&4\\7&3&4&4\\6&1&2&1\end{bmatrix}_{\frac{1}{2}R_1}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&2\\7&3&4&4\\6&1&2&1\end{bmatrix}_{-7R_1+R_2\text{ و }-6R_1+R_3}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&-4&-3&-10\\0&-5&-4&-11\end{bmatrix}_{-1R_3+R_2}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&1\\0&-5&-4&-11\end{bmatrix}_{5R_2+R_3}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&1\\0&0&1&-6\end{bmatrix}$$

على الشكل صيغة درجية r.e.f

$$\underset{-1R_3+R_2\text{ و }-1R_3+R_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&0&8\\0&1&0&7\\0&0&1&-6\end{bmatrix}\underset{-1R_2+R_1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&7\\0&0&1&-6\end{bmatrix}$$

على الشكل صيغة درجة مختزلة(r.r.e.f)

☑**<u>ملاحظة:</u> المصفوفة الناتجة لا تساوي المصفوفة A وانما تكافئها .**

<u>مثال (17) :</u>

$$A=\begin{bmatrix}5&2&2\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix}\underset{-1R_1+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}5&2&2\\7&3&4\\1&-1&0\end{bmatrix}\underset{R_1\leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0\\7&3&4\\5&2&2\end{bmatrix}\underset{-7R_1+R_2\text{ و }-5R_1+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&10&4\\0&7&2\end{bmatrix}\underset{\frac{1}{10}R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&\frac{2}{5}\\0&7&2\end{bmatrix}\underset{-7R_2+R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&\frac{2}{5}\\0&0&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}\underset{-\frac{5}{4}R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&\frac{2}{5}\\0&0&1\end{bmatrix}\underset{-\frac{2}{5}R_3+R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\underset{1R_2+R_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

حل اخر للمثال(17):

$$A=\underset{-1R_3+R_1}{\begin{bmatrix}5&2&2\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix}}\sim\underset{-1R_1}{\begin{bmatrix}-1&1&0\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix}}\sim$$

$$\underset{-1R_1}{\begin{bmatrix}1&-1&0\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix}}$$ و يمكن دمج العمليتين السابقتين في عملية واحدة

$$A=\underset{R_3-R_1}{\begin{bmatrix}5&2&2\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix}}\sim\underset{-7R_1+R_2\,,-6R_1+R_3}{\begin{bmatrix}1&-1&0\\7&3&4\\6&1&2\end{bmatrix}}\sim\underset{2R_2,3R_3}{\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&10&4\\0&7&2\end{bmatrix}}\sim$$

$$\underset{R_3-R_2}{\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&20&8\\0&21&6\end{bmatrix}}\sim\underset{-21R_2+R_3}{\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&21&6\end{bmatrix}}\sim\underset{\frac{1}{48}R_3}{\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&0&48\end{bmatrix}}\sim$$

$$\underset{2R_3+R_2}{\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}}\sim\underset{1R_2+R_1}{\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

☑**ملاحظـــة** : شـــكل $(\mathbf{r.e.f})$ قـــد يختلـــف اذا غيرنـــا طريقـــة الاختـــزال لكـــن $(\mathbf{r.r.e.f})$ يبقى نفسه مهما تغيرت طريقة الاختزال .

مثال(18) :

$$A=\underset{-1R_2+R_1}{\begin{bmatrix}3&7&-3\\2&5&1\\2&6&10\end{bmatrix}}\sim\underset{-2R_1+R_2\,,-2R_1+R_3}{\begin{bmatrix}1&2&-4\\2&5&1\\2&6&10\end{bmatrix}}\sim\underset{-2R_2+R_3}{\begin{bmatrix}1&2&-4\\0&1&9\\0&2&18\end{bmatrix}}\sim$$

$$\underset{-2R_2+R_1}{\begin{bmatrix}1&2&-4\\0&1&9\\0&0&0\end{bmatrix}}\sim\begin{bmatrix}1&0&-22\\1&0&9\\0&0&0\end{bmatrix}$$

مثال(19) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim$$

$$-1R_1 + R_2\, , -2R_1 + R_3\, , -2R_1 + R_4\, , -1R_1 + R_5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\frac{1}{3}R_2 \qquad\qquad -3R_2 + R_3\, , -6R_2 + R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \sim$$

$$R_3 \leftrightarrow R_5 \qquad\qquad \frac{1}{5}R_3\, , R_4 \leftrightarrow R_5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$-\frac{1}{5}R_4 \qquad\qquad -1\,R_4 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$-1\,R_3 + R_2\, , -1R_3 + R_1 \qquad\qquad -1\,R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6-1 بعض تطبيقات المصفوفات :

ان عمليات المصفوفات الحسابية لها دوراً كبيراً في الحياة إذ أنها تستخدم في كثير من المجالات التطبيقية وذلك بغرض تسهيل العملية الحسابية وتجنب الأخطاء والنواتج غير الدقيقة. فهي كثيراً ما تستخدم في الجوانب الاقتصادية وذلك لمعرفة حساب المتغيرات التي تطرأ على العملية الاقتصادية مثل حساب المصروفات والتكاليف الشهرية أو السنوية وكذلك لمعرفة مدى الخسارة أو الارباح. لذا فإن الكثير من مصانع وشركات الإنتاج تفضل نظام المصفوفات لرصد وحساب سلعها الإنتاجية خاصة تلك المصانع التي تتألف من مجموعات ووحدات لإنتاج سلع مختلفة في آن واحد، ولأن المصفوفة تتكون من صفوف وأعمدة لذا فهي الطريقة المثلى لتمثيل الوحدات أو المجموعات الإنتاجية وسلعها. وكذلك نجد دور المصفوفات في الجوانب والتطبيقات الفيزيائية مثل تمثيل الدارات الكهربائية لمعرفة وحساب التيار الساري أو معرفة الفولتية أو أي متغير فيزيائي آخر من الدائرة وكذلك تستخدم في التطبيقات الميكانيكية لحساب القوى، كما أن المصفوفات تدخل في عمليات التشفير وإرسال الرسائل المشفرة لحفظ البيانات، كما تستخدم سلاسل ماركوف في الأرصاد الجوية و غيرها باحتمال ما سيكون عليه النظام في حالة معينة من معرفة الحالة السابقة لها وفي كثير من المجالات التطبيقية الأخرى.

اولاً- التطبيقات في الاقتصاد : Applications in Economy

ان استخدام المصفوفات في الاقتصاد يعد من اهم التطبيقات لكثرة استخدامه , فمثلاً بفرض ان اقتصاد منطقة ما يقسم الى عدة قطاعات متنوعة كالصناعة والتجارة والمواصلات والاتصالات , وبفرض اننا نعلم النتاج الكلي لسنة واحدة ونعلم تماماً كيفية تبادل كل قطاع بالنسبة للقطاعات الأخرى , وندعو قيمة انتاج القطاع بـ السعر ومن اجل هذا اثبت لدينا النتيجة التالية : " يوجد معادلة أسعار متخصصة بالنتاج الكلي للقطاعات المتنوعة في كل منها طريقة ليتناسب الدخل مع التكاليف " كما في المثال التالي ((نفترض ان اقتصاد دولة ما يتألف من ثلاث قطاعات اساسية هي النفط والطاقة الكهربائية والسياحة وانتاج كل منها يوزع بين القطاعات الاقتصادية المتنوعة الاخرى كما هو مبين في الجدول (1-1) حيث ان العناصر الموجودة في الاعمدة تمثل بالأجزاء الكسرية الانتاج

الكلي لكل قطاع, فمثلاً العمود الثاني من الجدول يمثل انتاج الطاقة الكهربائية موزعة كالتالي : 40% للنفط و 50% للسـياحة والباقي 10% للكهرباء (أي للقطاع الكهربائي 10% كتكلفة) , وان مجموع الأجزاء العشرية في كل عمود يجب ان يساوي الواحد 1 .

جدول (1−1) انتاج بعض القطاعات الاقتصادية

Distribution of Output form:			
Oil	Electric	Tourism	Purchased by:
0.0	0.4	0.6	Oil
0.6	0.1	0.2	Electric
0.4	0.5	0.2	Tourism

نرمز للقيم الانتاج السنوي لكل من النفط , الكهرباء , السياحة بالرموز PT, PE, PO على التوالي , والمطلوب إيجاد معادلة الأسعار التي تجعل دخل كل قطاع يتناسب مع تكاليفه .

<u>الحل :</u>

القيم الموجودة بالأعمدة تمثل استهلاك انتاج من قبل القطاعات الأخرى وبالمقابل في الصفوف تمثل حاجة القطاع , فمثلاً الصـف الأول من الجدول يبين ان قطاع النفط يتلقى 40% من نتاج الكهرباء و 60% من نتاج السـياحة , فتكون تكلفة القطاع النفط هي $0.4_{PE} + 0.6_{PT}$ ولكي يكون الدخل مساوياً التكلفة نكتب

$$PO = \; 0.4_{PE} + 0.6_{PT}$$

اما الصف الثالث

$$PT = \; 0.4_{PO} + 0.5_{PE} + 0.2_{PT}$$

ولحل جميع المعادلات الخطية ننقل جميع المجاهيل الى طرف الايسر من كل معادلة ونجمع الحدود المتشابهة :

$PO - \ 0.4_{PE} - 0.6_{PT} = 0$

$- \ 0.6_{PO} - 0.9_{PE} - 0.2_{PT} = 0$

$- 0.4_{PO} - 0.5_{PE} + 0.8_{PT} = 0$

ثم نقوم بالتحويلات الصفية الأولية , وللتبسيط نوزع الحدود العشرية على مكانين

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.9 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & -0.5 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.66 & -0.56 & 0 \\ 0 & -0.66 & 0.56 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.66 & -0.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.94 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل العام يساوي $PO = 0.94\ PT\ ,\ 0.4PE = 0.85PT$ ومتجه المعادلة يكون

$$P = \begin{bmatrix} PO \\ PE \\ PT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.94\ PT \\ 0.85\ PT \\ PT \end{bmatrix} = PS \begin{bmatrix} 0.94 \\ 0.85 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ثانياً: موازنة المعادلات الكيميائية : Balancing Chemical Equations

المعادلات الكيميائية تحدد كميات المواد المتفاعلة والمواد الناتجة بالتفاعل الكيميائي , وسنأخذ المثال التالي : وهو احتراق غاز البروبان أي عند تفاعل C_3H_8 مع الاكسجين O_2 ليشكل ثنائي أكسيد الكربون CO_2 وبخار الماء H_2O كما في المعادلة الكيماالاتية:

$$(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \ \rightarrow (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O$$

ولموازنة المعادلة يجب إيجاد جميع الاعداد $x_1\ , x_2, x_3, x_4$ بحيث يكون عدد ذرات كل من الكربون (C) والهيدرجون (H) والاوكسجين (O) في الطرف الايسر مطابقاً لها في الطرف الأيمن (لان الذرات لا تفنى ولا تستحدث ذرات جديدة خلال التفاعل) وباستخدام المصفوفات والجبر الخطي نكتب المصفوفات التي تحوي عدد ذرات كل مركب في التفاعل , وفي التفاعل السابق لدينا ثلاث أنواع من الذرات (hydrogen , oxygen , carbon) فننشئ لكل المركبات كما يلي :

$$C_3H_8: \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}\ , O_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\ , CO_2: \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\ , H_2O: \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Carbon} \\ \leftarrow \text{Hydrogen} \\ \leftarrow \text{Oxygen} \end{matrix}$$

لموازنة المعادلة فإن المعاملات $x_1\ , x_2, x_3, x_4$ يجب ان تحقق

$$x_1\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

ننقل جميع الحدود الى طرف مع تغيير اشاراتها :

$$x_1\begin{bmatrix}3\\8\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}-x_3\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}-x_4\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

الحل العام بعد القيام بحل جملة المعادلات الخطية واستخدام التحويلات الأولية :

$x_1=\frac{1}{4}x_4\,,x_2=\frac{5}{4}x_4\,,x_3=\frac{3}{4}x_4$ حيث x_4 اختيارية

ولكن المعاملات في المعادلة الكيميائية يجب ان تكون اعداد صـــحيحة فنأخذ $x_4=4$ بالتالي

$x_1=1\,,x_2=5\,,x_3=3$ والمعاملات بأصغر ما يمكن فتصبح المعادلة الموزونة بالشكل

$$C_3H_8+5O_2\rightarrow 3CO_2+4H_2O$$

ثالثاً: في الشبكات الكهربائية In Electrical Networks

نستطيع استخدام المصفوفات في الشبكات الكهربائية والالكترونية بشكل واسع , ولدراسة هذا التطبيق بشـكل مبسـط نأخذ المثال التالي , حيث لدينا في الشـكل ادناه شـبكة من ثلاث حلقات , والمطلوب تحديد التيارات المارة خلالها .

الحل :

يكون R1 يمر خلال ثلاث مقاومات ومجموع فروق الجهد I_1 بالنســبة للحلقة 1 التيار

$4I_1+4I_1+3I_1=11I_1$

التيار في الحلقة 2 يمر في جزء من الحلقة 1 خلال الفرع القصـــير بين B و A وفرق الجهد على الفرع المشترك هو $3I_2$ فولط .

على اية حال فأن اتجاه التيار بالفرع AB في الحلقة 1 يعكس ما هو في الحلقة 2 فالمجموع الجبري لفروق الجهد في الحلقة 1 هو $11I_1-3I_2$ وجهد الحلقة 1 هو $30+$ فولط وحسب قانون كيرشوف لفروقات الجهد ينتج $11I_1-3I_2=30$

ومعادلة الحلقة 2 هي $-3I_1+6I_2-I_3=5$

بحيث $-3I_1$ ناتجة عن مرور التيار في الحلقة 1 عبر الفرع AB (فرق الجهد ســـالب لان التيار يمر باتجاه معاكس عن جهته في الحلقة 2) و $6I_2$ هي مجموع المقاومات في الحلقة 2 مضـــروبة

بتيار الحلقة , اما $-I_3$ ناتجة من تيار الحلقة 3 خلال المقاومة 1 ohm في الفرع CD عكس اتجاهه في الحلقة 2 .

ومعادلة الحلقة 3 هي $-I_2 + 3I_3 = -25$

في الحلقة 3 لدينا منبعي جهد فمجموعهما -25 فولط حيث الجهد سالب لان اتجاه التيار في CD ايضاً معاكس

ولحساب تيارات الحلقة نحل جملة المعادلات

$$11I_1 - 3I_2 = 30$$

$$-3I_3 + 6I_2 - I_3 = 5$$

$$-I_2 + 3I_3 = -25$$

ثم نقوم بالتحويلات الأولية على الاسطر للمصفوفة الموسعة التي تقودنا الى الحل $I_1 = 3$ أمبير $I_2 = 1$ أمبير $I_3 = -8$ أمبير , ولكن القيمة السالبة لـ I_3 تدل على الجهة فقط .

تمارين نهاية الفصل

1- لتكن $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، أحسب :

1- $(AB)^t$ 2- (B^tA^t) 3- $(5AB)$ 4- $(D-E)^t$

5- $(2E-D)$ 6- $(D+3E)^t$ 7- $(\frac{1}{4}C^t - \frac{1}{2}B)$ 8- $A^t(C^tC - BB)$

لاحظ أن : $(AB)^t = B^tA^t$ وأن : $(A \mp B)^t = A^t \mp B^t$ ، كذلك $(rA)^t = rA^t$

2- اي من المعادلات الاتية r.e.f:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3- اي من المعادلات الاتية r.r.e.f

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4- ضع كل من المصفوفات الآتية على صيغة درجة صفية مختزلة .

1) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 7\\ 3 & -2 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 9 & 6\end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15\\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18\end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ 1 & -3 & 5\\ 3 & -1 & -1\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix}6 & 4 & -5\\ 2 & -3 & 2\end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 7 & 7\end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & -1 & 0\\ 2 & 6 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 6 & 4 & 2 & -2\end{bmatrix}$